RESULTADOS DE SEPARACIÓN PARA PUNTOS DE MÍNIMA ENERGÍA EN ESFERAS

TEORÍA Y APLICACIONES DE MATEMÁTICAS COMPUTACIONALES

PEDRO R. LÓPEZ GÓMEZ · lopezpr@unican.es

DPTO. DE INGENIERÍA DE COMUNICACIONES Y DPTO. MATESCO, UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

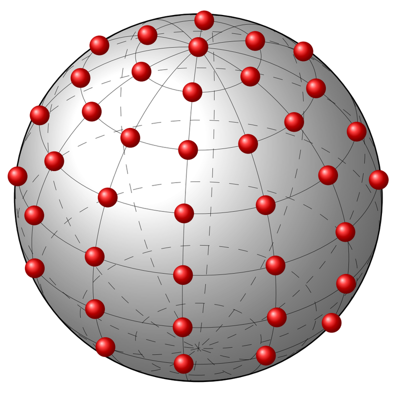
PROYECTO PID2019-104958RB-C43 (ADELE) FINANCIADO POR MCIN/AEI (10.13039/501100011033), PROYECTO PID2020-113887GB-I00 FINANCIADO POR MCIN/AEI (10.13039/501100011033) Y PROYECTO 21.SI01.64658 FINANCIADO POR BANCO SANTANDER/UNIV. CANTABRIA.

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

1. ENERGÍA DE RIESZ

Colecciones de N puntos en $\mathbb{S}^d$

$$\omega_N = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{S}^d$$



Nos interesan las colecciones que **minimizan** la **energía de Riesz** o s-energía, definida como

$$E_s(\omega_n) = \begin{cases} \sum_{i\neq j} \|x_i - x_j\|^{-s}, & \text{si } s > 0 \\ \sum_{i\neq j} \log \|x_i - x_j\|^{-1}, & \text{si } s = \log \end{cases}$$

2. DISTANCIA DE SEPARACIÓN

Definición $\quad \delta(\omega_N) := \min_{1\leq i\neq j\leq N} \|x_i - x_j\|$

Decimos que una familia $\{\omega_N\}_2^\infty$ está **bien separada** si existe una constante $C = C(d) > 0$, independiente de N, tal que para todo $N \geq 2$ se cumple que

$$\delta(\omega_N) \geq C N^{-1/d}.$$

3. EL PROBLEMA

Determinar si los puntos de una configuración ω_N^* que minimiza la s-energía en $\mathbb{S}^d$ están bien separados para todo N.

4. MOTIVACIÓN

Disponer de puntos bien separados en esferas y otros conjuntos tiene importantes aplicaciones prácticas:

- Interpolación y aproximación de funciones.
- Evaluación numérica de integrales.
- Diseño de señales en telecomunicaciones.

5. ESTADO DEL ARTE

Resuelto ✓

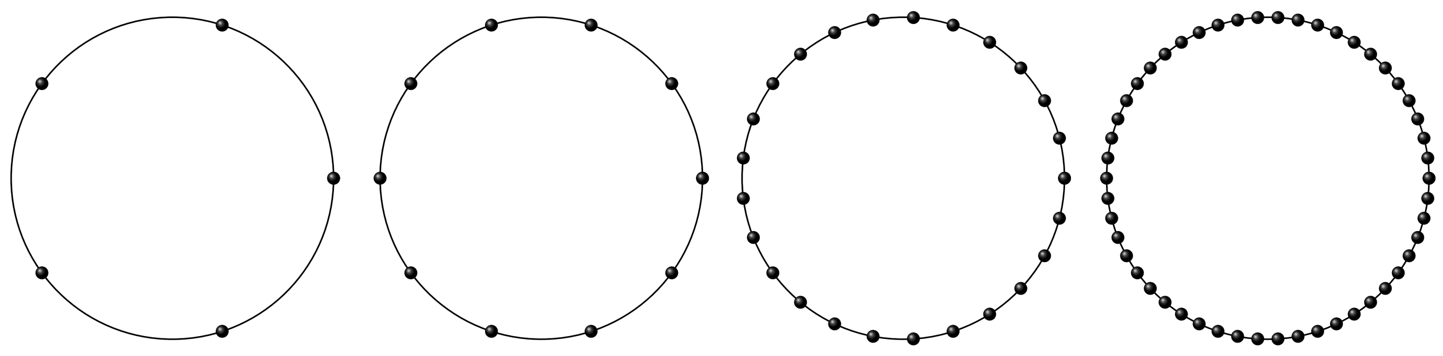
- $d = 1$
- $d = 2$
- $d \geq 2$, $s \in [d-2, d)$

No resuelto ✗

- $d \geq 3$, $s \in (0, d-2)$, $s = \log$

6. PUNTOS BIEN SEPARADOS EN $\mathbb{S}^1$

¿N puntos en $\mathbb{S}^1$ bien separados? **Puntos equiespaciados**



En el caso de la energía de Riesz, las **únicas** configuraciones minimizantes son las equiespaciadas y están bien separadas:

$$\delta(\omega_N^*) = 2 \sin \frac{\pi}{N} \geq \frac{4}{N}.$$

8. PUNTOS BIEN SEPARADOS EN $\mathbb{S}^d$

Primera aportación

Teorema (Kuijlaars, Saff y Sun, 2007). *Para $d-1 \leq s < d$, existe una constante $\lambda_{s,d} > 0$ tal que para todo $N \geq 2$ y cualquier configuración ω_N^* en $\mathbb{S}^d$ de N puntos que minimizan la s-energía,*

$$\delta(\omega_N^*) \geq \frac{\lambda_{s,d}}{N^{1/d}}.$$

Mejorado más tarde y ampliado a $d-2 \leq s < d$ por Dragnev y Saff (2007) y Brauchart, Dragnev y Saff (2014).

7. PUNTOS BIEN SEPARADOS EN $\mathbb{S}^2$

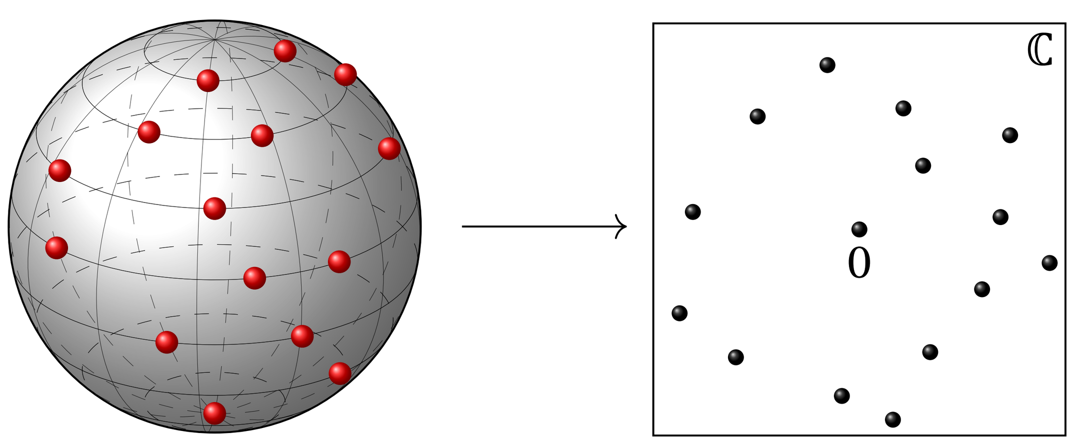
¿Están bien separados los puntos que minimizan la energía logarítmica en $\mathbb{S}^2$, conocidos como **puntos elípticos de Fekete**?

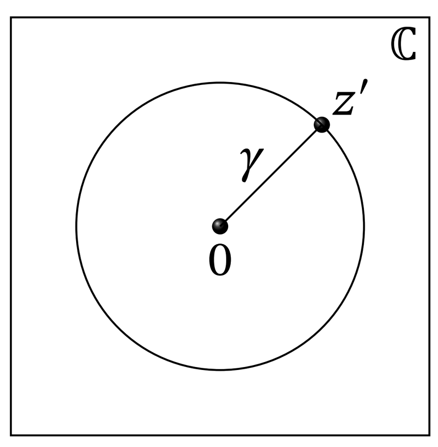
Rakhmanov, Saff y Zhou (1995): $\delta(\omega_N^*) \geq 3/(5\sqrt{N})$; Dubickas (1996): $\delta(\omega_N^*) \geq 7/(4\sqrt{N})$; Dragnev (2002): $\delta(\omega_N^*) \geq 2/\sqrt{N-1}$.

NUESTRO APORTE. *Si ω_N^* es una configuración que minimiza la energía logarítmica en $\mathbb{S}^2$, entonces* $\delta(\omega_N^*) \geq \frac{19}{25}\frac{1}{\sqrt{N}}$.

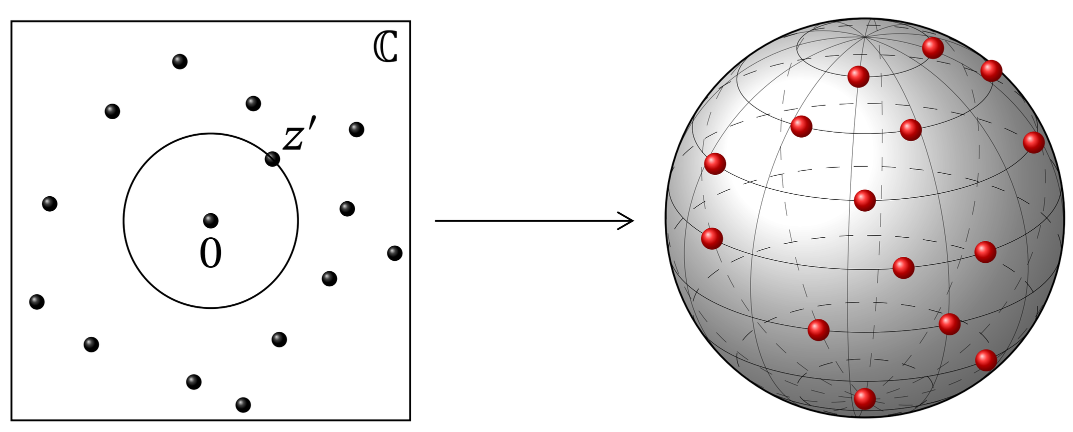
Idea de la demostración:

1. Proyectamos los puntos de la configuración minimizante.
2. ¿Cómo elegimos $r(s)$ y $R(s)$? **Optimizamos ese proceso**.
3. La buena separación en el plano implica buena separación en $\mathbb{S}^2$.





$$1 \leq \int_0^{|z'|} \frac{R(s)(1+R(s)^2)^{N/2}}{(R(s)-r(s))^2}\, ds$$



REFERENCIAS

Borodachov, S. V., Hardin, D. P. y Saff, E. B. (2019), *Discrete Energy on Rectifiable Sets*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York.

Brauchart, J. S., Dragnev, P. D. y Saff, E. B. (2014), *Riesz external field problems on the hypersphere and optimal point separation*. Potential Analysis, 141, págs. 647-678.

Dragnev, P. D. (2002), *On the separation of logarithmic points on the sphere*. Approximation Theory X: Abstract and Classical Analysis, págs. 137-144.

Dragnev, P. D. y Saff, E. B. (2007), *Riesz spherical potentials with external fields and minimal energy points separation*. Potential Analysis, 26, págs. 139-162.

Dubickas, A. (1996), *On the maximal product of distances between points on a sphere*. Lithuanian Mathematical Journal, 36, n.º 3, págs. 241-248.

Kuijlaars, A. B. J., Saff, E. B. y Sun, X. (2007), *On separation of minimal Riesz energy points on spheres in Euclidean spaces*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 199, n.º 1, págs. 172-180.

Rakhmanov, E. A., Saff, E. B. y Zhou, Y. M. (1995), *Electrons on the sphere*. En: Computational Methods and Function Theory 1994. Ed. por R. M. Ali, S. Ruscheweyh y E. B. Saff. Vol. 5. Series in Approximation and Decompositions. World Scientific Publishing, págs. 293-309.

¿QUIERES SABER MÁS?